1. Lineare Verzinsung

1.1 Endwert K_n einer Einmalanlage K_0 bei linearer ganzjähriger Verzinsung nach n Jahren

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100} \cdot n\right) = K_0(1 + i \cdot n)$$

1.2 Endwert K_m bei unterjähriger linearer Verzinsung nach m Zinstagen

$$K_m = K_0\left(1 + i \cdot \frac{m}{Jahreslänge\ in\ Tagen}\right)$$

1.3 Zinsstaffelrechnung

$$Zinsen = \frac{Zinszahl}{Zinsdivisor} = \frac{\#}{ZD}$$

$$\# = \frac{K \cdot Zinstage}{100}$$

$$ZD = \frac{360}{p}$$

1.4 Endwert von m Rentenzahlungen nach 1 Jahr bei linearer Verzinsung

1.4.1 bei vorschüssiger Zahlung

$$K_1 = R\left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i\right)$$

1.4.2 bei nachschüssiger Zahlung

$$K_1 = R\left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i\right)$$

2. Exponentielle Verzinsung im Zwei-Punkte-Fall

2.1 Endwert K_n eines Anfangskapitals K_0 nach n Verzinsungsperioden

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0(1+i)^n = K_0 q^n$$

2.2 Unterjährige Zinseszinsrechnung

Wenn ein Anfangskapital K_0 im Verlaufe des Jahres m-mal mit dem Periodenzinssatz j_m verzinst wird, dann gilt für den Zusammenhang zwischen dem Periodenzinssatz j_m, dem Jahreszinssatz i, dem Anfangskapital K_0 und dem Endkapital nach 1 Jahr K_1

$$K_0(1 + j_m)^m = K_1 = K_0(1 + i)$$

woraus folgt

$$(1 + j_m)^m = 1 + i$$

2.2.1 Endwert K_{nm}, wenn ein Anfangskapital K_0 über n Jahre verzinst wird und innerhalb jeden Jahres m-mal mit dem Periodenzinssatz j_m:

$$K_{nm} = K_0(1 + j_m)^{n \cdot m}$$

In kaufmännischen Anwendungen wird der unterjährige Periodenzinssatz häufig zeitproportional aus dem nominellen Jahreszinssatz i_{nom} abgeleitet. Wenn das Laufzeitjahr aus m gleichlangen unterjährigen Zinsperioden besteht ergibt sich so der relative Periodenzinssatz j_{rel}

$$j_{rel} = \frac{i_{nom}}{m}$$

2.2.2 Ableitung des effektiven Jahreszinssatzes i_{eff} aus dem nominellen Jahreszinssatz i_{nom} bei unterjähriger Verzinsung mit dem relativen Periodenzinssatz j_{rel}

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m - 1$$

2.2.3 Ermittlung des zum Jahreszinssatz i konformen Periodenzinssatzes j_{konf}

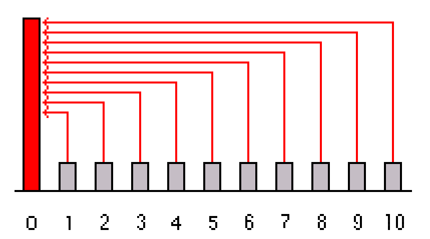
$$j_{konf} = \sqrt[m]{1 + i} - 1$$

3. Rentenrechnung (exponentiell)

3.1 Rentenbarwert (heutiger Wert von n künftigen Rentenzahlungen R)

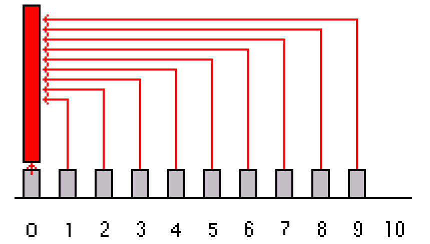
3.1.1 bei nachschüssiger (eine Periode nach heute beginnender) Zahlung

$$K_0 = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$



3.1.2 bei vorschüssiger (heute beginnender) Zahlung

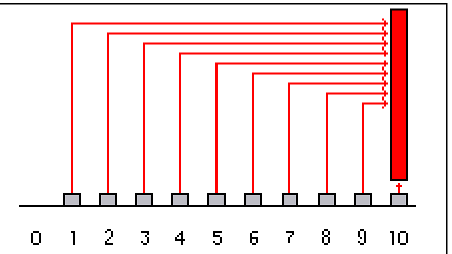
$$K_0 = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}q$$



3.2 Rentenendwert (Endwert von n Rentenzahlungen R)

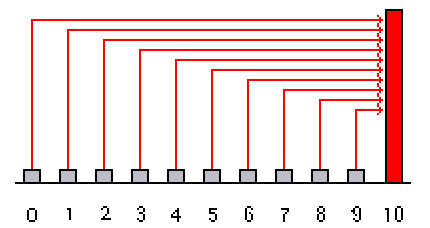
3.2.1 bei nachschüssiger Zahlung

$$K_n = R\frac{q^n - 1}{q - 1}$$



3.2.2 bei vorschüssiger Zahlung

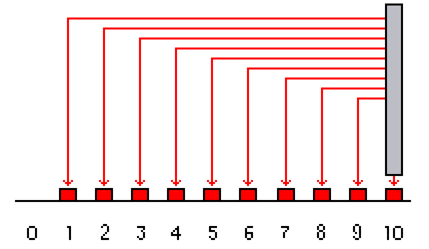
$$K_n = R\frac{q^n - 1}{q - 1}q$$



3.3 Umwandlung einer endfälligen Zahlung K_n in n Rentenzahlungen R mit Hilfe des Restwertverteilungsfaktors

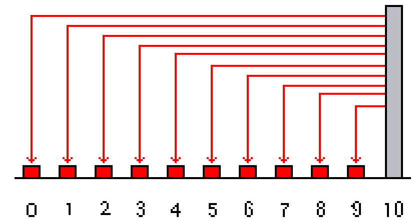
3.3.1 bei nachschüssiger Zahlung

$$R = K_n\frac{q - 1}{q^n - 1}$$



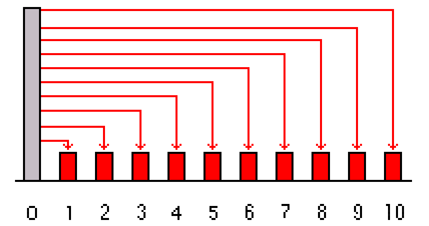
3.3.2 bei vorschüssiger Zahlung

$$R = K_n\frac{q - 1}{(q^n - 1)q}$$



3.4 Umrechnung einer heutigen Zahlung K_0 in n konstante gleichwertige künftige Zahlungen (Annuitäten A)

$$A = K_0\frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$



4. Rechnerische lineare Interpolation zur näherungsweisen Ermittlung der Nullstelle der Kapitalwertfunktion

$$p_{eff} = p_1 - C_{01}\frac{p_2 - p_1}{C_{02} - C_{01}}$$

mit p_{eff} … interner Zinsfuß

P_1 und p_2 die gewählten Versuchszinssätze

C_{01} und C_{02} die dazugehörigen Kapitalwerte

4. Tilgungsrechnung

Standardfall eines Annuitätendarlehens:

- Zinsperiode = Zahlungsperiode
- Gläubigerleistung = Kreditsumme K_0
- Schuldnerleistung = gleichhohe Annuitäten A, beginnend eine Periode nach Kreditauszahlung (nachschüssige Zahlung)

Für den Standardfall gelten die folgenden Beziehungen:

<table>
<tr>
<td>Annuität
$$A = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$$</td>
<td rowspan="2">Laufzeit (Anzahl der Annuitäten) bis zur vollständigen Tilgung
$$n = \frac{\log \frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)}}{\log q} = \frac{\log A - \log\big(A - K_0 \cdot (q-1)\big)}{\log q}$$
oder
$$n = \frac{\log \frac{i + i_T}{i_T}}{\log q} = \frac{\log(i + i_T) - \log i_T}{\log q}$$
mit i = Zinssatz und i_T = Tilgungssatz
$$i_T = \frac{A - K_0 \cdot i}{K_0}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Kaufmännische Berechnung der Annuität („Prozentannuität“):
jährlicher Kapitaldienst
$$= Darlehensbetrag \cdot (Zinssatz + Tilgungssatz)$$
Ratenhöhe bei unterjähriger Zahlweise
$$Rate = Darlehensbetrag \cdot \frac{Zinssatz + Tilgungssatz}{Anzahl\ Raten\ pro\ Jahr}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Restschuld K_m nach m Ratenzahlungen
$$K_m = K_0 \cdot q^m - A \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}$$</td>
<td>Abweichende Höhe der letzten Rate bei nicht ganzzahliger Annuitätenzahl:
1. Schritt: Ermittlung der Restschuld nach Zahlung der letzten vollen Annuität.
2. Schritt:
Restschuld nach Zahlung der letzten vollen Annuität
+ Zinsen auf diese Restschuld
= Höhe der letzten abweichenden Rate</td>
</tr>
</table>