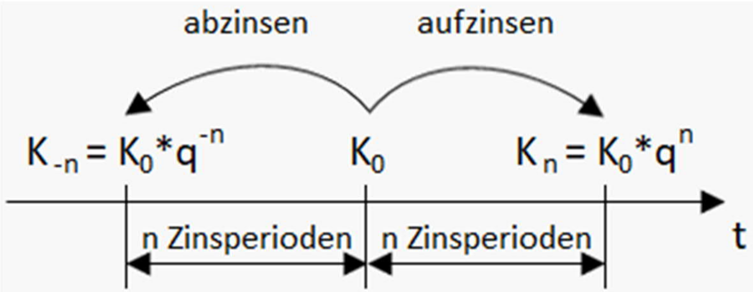
Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik bei exponentieller Verzinsung

Durch eine heutige Kreditaufnahme ist es möglich, Zahlungseingänge, die erst in der Zukunft erfolgen werden, bereits heute zu nutzen. Durch Anlage von heute verfügbarem Geld lassen sich künftige Zahlungseingänge generieren. Diese zeitliche Transformation von Zahlungen kann mathematisch durch Auf- bzw. Abzinsen nachgebildet werden.



mit q = (1+i).

Damit wird eine zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgende Zahlung in eine zu einem früheren oder späteren Zeitpunkt erfolgende gleichwertige (äquivalente) Zahlung umgerechnet.

Unter der Annahme, dass Kapitalbeträge exponentiell mit 4% p.a. wachsen ist eine heutige Zahlung von 100 € genau so viel wert wie eine Zahlung in Höhe von 219,11 € in 20 Jahren oder eine Zahlung in Höhe von 45,64 € vor 20 Jahren.

Beim Austausch von Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgen, ist es von besonderem Interesse, ob diese Zahlungen wertmäßig einander entsprechen, ob man also einen fairen Preis für die Kapitalüberlassung bzw. Kapitalaufnahme erhält bzw. zahlt – anders ausgedrückt: ob die Zahlungen äquivalent sind. Die Zahlungen müssen also miteinander verglichen werden. Um Zahlungen vergleichen oder zusammenfassen zu können, müssen sie zeitlich in einen gemeinsamen Zeitpunkt transformiert werden.

Beispiel: Die Äquivalenz zweier Zahlungen soll geprüft werden. Zahlung „Z_0" beträgt 100 € und ist heute (t_0) fällig. Zahlung „Z_4" beträgt 116,99 € und ist in vier Jahren (t_4) fällig. Der Kalkulationszinssatz betrage 4% p.a. Es gelte exponentielle Verzinsung.
Z_0 ist heute 100,00 € wert,
Z_4 ist heute ebenfalls 100,00 € wert ($116{,}99 \cdot 1{,}04^{-4} = 100{,}00$).
Beide Zahlungen sind somit äquivalent.

Welcher Stichtag zum Vergleich gewählt wird, ist gleichgültig. Sind zwei zu unterschiedlichen Zeitpunkten fällige Zahlungen äquivalent bezüglich eines Zeitpunktes, so auch in Bezug auf jeden anderen Zeitpunkt:

Stichtag	Wert von „Z_0"	Wert von „Z_4"
t_3	$100 \cdot 1{,}04^3 = 112{,}49$	$116{,}99 \cdot 1{,}04^{-1} = 112{,}49$
t_{20}	$100 \cdot 1{,}04^{20} \approx 219{,}11$	$116{,}99 \cdot 1{,}04^{16} = 219{,}12$
t_{-20}	$100 \cdot 1{,}04^{-20} = 45{,}64$	$116{,}99 \cdot 1{,}04^{-24} = 45{,}64$

Zwei Zahlungen K_0 und K_n (K_0 fällig im Zeitpunkt 0, K_n fällig im Abstand von n Zinsperioden bzgl. 0) heißen (unter Verwendung von Zinseszinsen und dem Periodenzinssatz i) äquivalent, wenn zwischen ihnen die Beziehung

$$K_n = K_0 (1+i)^n = K_0\, q^n$$

besteht.
Ist n positiv (negativ), so liegt K_n zeitlich um n Zinsperioden später (früher) als K_0.

Zur Berechnung der Zeitwerte sind beliebige Umwege oder Stufen statthaft.
Der Zeitwert der Zahlung „Z_0" im Zeitpunkt t_3 könnte z.B. also auch ermittelt werden

durch Aufzinsen über 4 Jahre und anschließendes Abzinsen über 1 Jahr

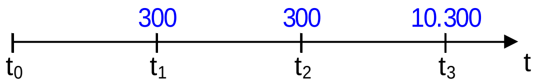
$$K_3 = 100 \cdot 1{,}04^4 \cdot 1{,}04^{-1} = 112{,}49$$

- oder durch Abzinsen über 2 Jahre und anschließendes Aufzinsen über 5 Jahre

$$K_3 = 100 \cdot 1{,}04^{-2} \cdot 1{,}04^5 = 112{,}49$$

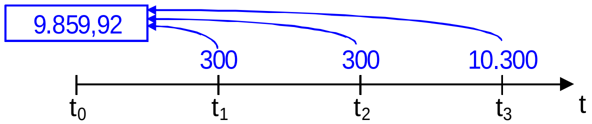
Zwei (oder mehr) zu unterschiedlichen Zeitpunkten fällige Zahlungen dürfen nur dann zu einem (zeitbezogenen) Gesamtwertzusammengefasst werden, wenn sie zuvor auf einen gemeinsamen Bezugstermin auf-/abgezinst wurden.

Beispiel: Es werden die folgenden sicheren Einzelzahlungen bei einem Kalkulationszinssatz von 3,5% p.a. erwartet:

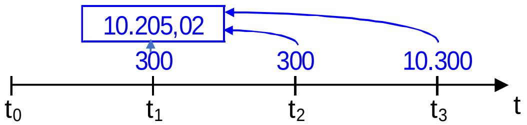


Die Zusammenfassung dieser Zahlungen ergibt bei verschiedenen Bezugsterminen folgende Ergebnisse:

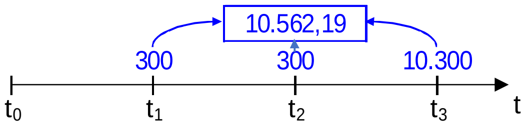
$K_0 = 300 \cdot 1{,}035^{-1} + 300 \cdot 1{,}035^{-2} + 10300 \cdot 1{,}035^{-3} = 9859{,}92$



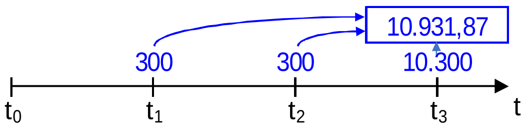
$K_1 = 300 + 300 \cdot 1{,}035^{-1} + 10000 \cdot 1{,}035^{-2} = 10205{,}02$



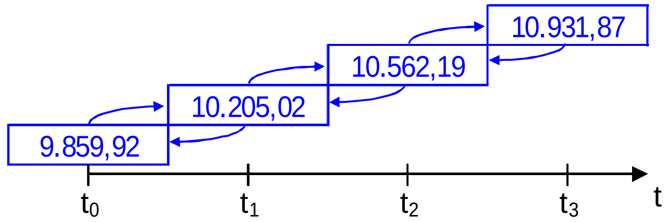
$K_2 = 300 \cdot 1{,}035 + 300 + 10300 \cdot 1{,}035^{-1} = 10562{,}19$



$K_3 = 300 \cdot 1{,}035^{2} + 300 \cdot 1{,}035 + 10300 = 10931{,}87$



Wurde der Wert einer Zahlungsreihe, den sie zu einem bestimmten Zeitpunkt besitzt, ermittelt, lässt sich jeder andere Zeitwert dieser Zahlungsreihe durch einmaliges Auf-/Abzinsen dieses ermittelten Zeitwerts berechnen:



z.B.

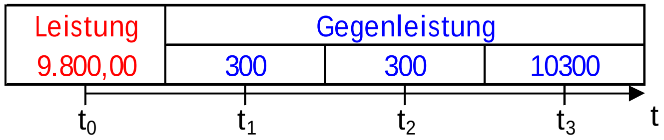
$K_1 = 9859{,}92 \cdot 1{,}035 = 10205{,}02 = 10562{,}19 \cdot 1{,}035^{-1}$

Wenn zu jedem Zeitpunkt die Möglichkeit besteht, einen Geldbetrag zu 3,5% p.a. mit Zinseszins über beliebige Zeiträume anzulegen, ist es völlig gleichgültig, ob die ursprüngliche Zahlungsreihe vereinnahmt wird oder ob man zu den jeweiligen Stichtagen einen Geldbetrag in Höhe des jeweiligen Zeitwerts erhält, der für die restliche Zeit wieder verzinslich angelegt werden kann.

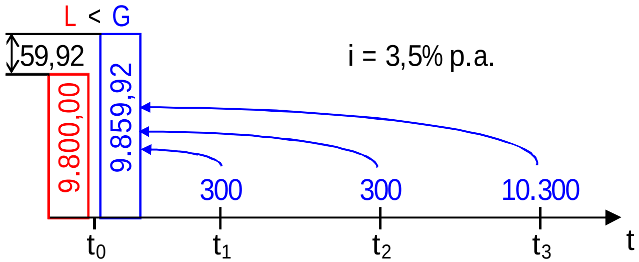
Die für die verschiedenen Bezugstermine ermittelten Gesamtwerte der Zahlungsreihe sind somit sowohl untereinander als auch mit der Zahlungsreihe selbst äquivalent.

Nachdem der Zeitwert der Zahlungsreihe durch Auf- oder Abzinsen der Einzelzahlungen auf denselben gewünschten Zeitpunkt ermittelt wurde, kann dieser mit dem Zeitwert anderer Zahlungen oder Zahlungsreihen verglichen werden, um diese auf Äquivalenz zu prüfen.

Annahme: Es handelt sich bei der dargestellten Zahlungsreihe um Einzahlungen, die wir im Austausch als Gegenleistung für einen heute (in t_0) auszuzahlenden Betrag in Höhe von 9.800 € erhalten werden.

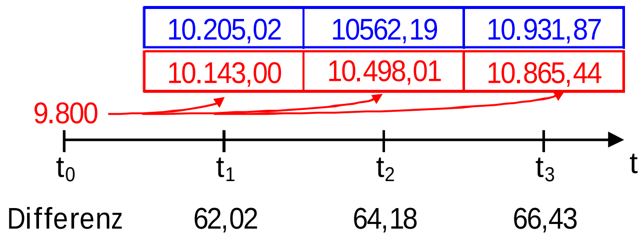


Ein Vergleich der Werthaltigkeit in t_0 zeigt, dass hier Leistung und Gegenleistung unterschiedlich viel wert, also <u>nicht</u> äquivalent sind:



Der Wert der Gegenleistung übersteigt den Wert der eigenen Leistung um 59,92 € zu unserem Vorteil. In der Investitionsrechnung wird diese Differenz als Kapitalwert C_0 bezeichnet.

Der Vergleich kann auch zu jedem anderen beliebigen Bezugstermin vorgenommen werden. Voraussetzung ist, dass die zu vergleichenden Zahlungen im gleichen Zeitpunkt stattfinden oder auf den gleichen Zeitpunkt transformiert wurden.



Sind Zahlungen zu einem Stichtag nicht äquivalent, sind sie es auch nicht zu beliebigen anderen Stichtagen.

Die nicht äquivalenten Leistungen haben zu jedem Stichtag dasselbe Wertverhältnis:

$$\frac{10.931{,}87}{10.865{,}44} = \frac{10.562{,}19}{10.498{,}01} = \frac{10.205{,}02}{10.143{,}00} = \frac{9.859{,}92}{9.800{,}00} = 1{,}0061141$$

Die Differenz zwischen nicht äquivalenten Zahlungen an einem Stichtag kann auch direkt ermittelt werden, indem die bereits ermittelte Differenz eines anderen Stichtages auf- bzw. abgezinst wird, z.B. $59{,}92 \cdot 1{,}035^3 = 66{,}43$.

Von besonderem Interesse ist die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen Zahlungen zu anderen Zahlungen äquivalent sind.

Zur Beantwortung dieser Frage ist vom Äquivalenzprinzip

$$\boxed{\text{Leistung = Gegenleistung}}$$

und einer entsprechenden Äquivalenzgleichung auszugehen. Auf dieser Basis lassen sich verschiedene Problemstellungen bearbeiten.

- Bei gegebenem Zinssatz von 3,5% p.a. und gegebener Gegenleistung (3 nachschüssigen Zahlungen 300 €/300 €/10300 €): Welche äquivalente Leistung ist zu erbringen?

$$Leistung = 300 \cdot 1{,}035^{-1} + 300 \cdot 1{,}035^{-2} + 10300 \cdot 1{,}035^{-3}$$

Die äquivalente Leistung beträgt – wenn sie in t_0 erbracht wird – 9.859,92 €.
Äquivalent wäre aber z.B. auch eine nachschüssige Rentenzahlung mit drei Raten in Höhe von jeweils
$9859{,}92 \cdot \frac{1{,}035^3 \cdot 0{,}035}{1{,}035^3 - 1}$ = 3.519,34 €.

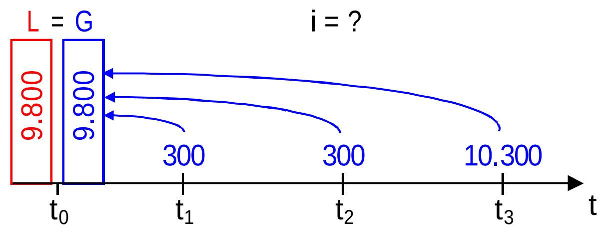
- Bei gegebenem Zinssatz von 3,5% p.a. und gegebener Leistung in Form einer heutigen Einmalzahlung von 9.800 €: Worin besteht die äquivalente Gegenleistung?

$$9800 = Gegenleistung$$

Äquivalente Gegenleistungen sind z.B. auch
eine Zahlungsreihe, bestehend aus 343 € in t_1, 343 € in t_2 sowie 10.143 € in t_3 oder
eine nachschüssige Rentenzahlung mit drei Raten in Höhe von jeweils $9800 \cdot \frac{1{,}035^3 \cdot 0{,}035}{1{,}035^3 - 1}$ = 3.497,95 oder
eine Einmalzahlung in t_3 in Höhe von 10.865,44 € oder ...

- Bei gegebener Leistung und gegebener Gegenleistung:

  Welcher Zinssatz lässt Leistung und Gegenleistung gleichwertig werden?



$$9800 = 300 \cdot q^{-1} + 300 \cdot q^{-2} + 10300 \cdot q^{-3}$$

mit $q = (1+i_{eff})$

Beim gesuchten Zinssatz handelt es sich um den Effektivzinssatz i_{eff}, ein im Anlage– oder Kreditgeschäft übliches (oder auch vorgeschriebenes) Vergleichskriterium.

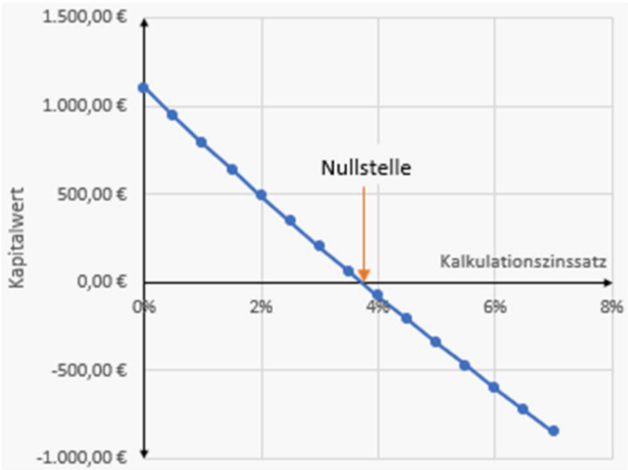
Berechnung des Effektivzinssatzes

Durch Umformen der Äquivalenzgleichung erhält man

$$300 \cdot q^{-1} + 300 \cdot q^{-2} + 10300 \cdot q^{-3} - 9800 = 0$$

Es ist also jener Kalkulationszinssatz zu bestimmen, welcher zu einem Kapitalwert von Null führt (die Differenz zwischen Wert der Leistung und Wert der Gegenleistung wird Null; beide sind somit äquivalent).

Der Kapitalwert ist eine Funktion des Kalkulationszinssatzes. Unterschiedlich hohe Kalkulationszinssätze bewirken unterschiedlich große Differenzen zwischen Leistung und Gegenleistung, also unterschiedlich hohe Kapitalwerte. Dabei hat die Kapitalwertfunktion bei Normalinvestitionen (eine heutige Auszahlung führt zu künftigen Einzahlungsüberschüssen) einen fallenden Verlauf:



Zur Ermittlung des Effektivzinssatzes ist somit die Nullstelle der Kapitalwert-funktion zu bestimmen.

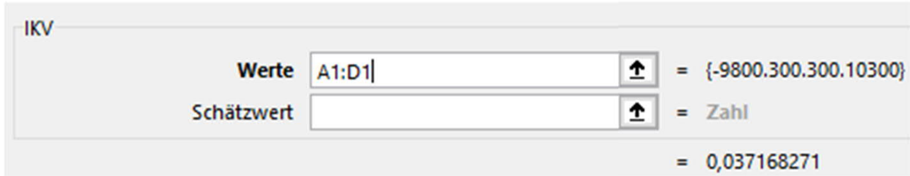
Bei Äquivalenzgleichungen höheren Grades ist die Lösung durch einfaches Auflösen der Gleichung nach i nicht möglich. Zur Gleichungslösung ist ein iteratives Näherungsverfahren erforderlich.

- Lösung mit Kalkulationsprogramm MS-Excel:

In A1 bis D1 Aus- und Einzahlungen zeitlich geordnet eingeben (Vorzeichen beachten!),

	A	B	C	D	E
1	-9800	300	300	10300	3,717%

in E1 die Funktion „IKV" arbeiten lassen:



- Aufstellen einer Wertetabelle mit Casio-Taschenrechner:

TABLE-Modus einschalten: MODE 3
Kapitalwertfunktion eingeben, dabei Variable X (entspricht dem gesuchten q) mit ALPHA), =

Start- und Endwert sowie Schrittweite eingeben, jeweils mit = abschließen, Wertetabelle wird erzeugt.
Ablesen, wo der Übergang von negativen zu positiven Werten erfolgt, in welchem Bereich also die Nullstelle zu finden ist,

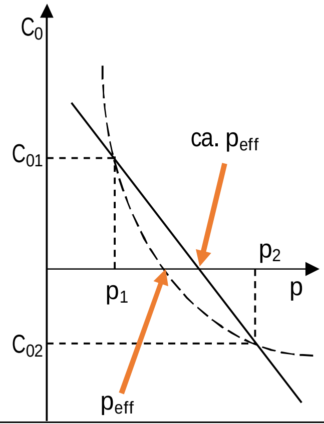
ggf. weiter eingrenzen und Schrittweite verringern. Hierzu mit AC wieder zurück in den Eingabemodus wechseln.
Ausgehend von den Wertepaaren der Tabelle mit Regula falsi (siehe im Folgenden) weiterzuarbeiten, führt ebenfalls zum Ziel.

- Regula falsi, Sekantennäherungsverfahren, Anwendung der rechnerischen linearen Interpolation:

Mit einem ersten Versuchszinssatz starten (evtl. aus Wertetabelle), z.B. $i_1 = 3{,}6\%$ ergibt $C_{01} = +32{,}22$. Äquivalenz wurde nicht erreicht. Die künftigen Überschüsse müssen stärker abgezinst werden.
Versuch 2, z.B. $i_2 = 3{,}8\%$ ergibt $C_{02} = -22{,}85$. Auch hier wurde keine Äquivalenz erzielt; die künftigen Überschüsse wurden jetzt jedoch zu stark abgezinst. Der gesuchte Zinssatz muss also zwischen 3,6% und 3,8% liegen.

Nunmehr kann auf Basis dieser zwei Wertepaare der Schnittpunkt der Sekante mit der Abszisse ermittelt wird. Man erhält die Nullstelle einer linearen Funktion, die in der Nähe der Nullstelle der Kapitalwertfunktion liegt:

Prinzip der linearen Interpolation



Formel zur rechnerischen linearen Interpolation

$$p_{eff} = p_1 - C_{01}\,\frac{p_2 - p_1}{C_{02} - C_{01}}$$

$$p_{eff} = 3{,}6 - 32{,}22 \cdot \frac{3{,}8 - 3{,}6}{-22{,}85 - 32{,}22} \approx 3{,}717$$

Diese erste Näherung lässt sich mit Hilfe der gleichen Verfahrensweise bei Notwendigkeit beliebig weiter verbessern:
Der Kapitalwert C_{03} bei einem Kalkulationssatz i_3= 3,717% beträgt -0,048. Interpolation zwischen i_2 und i_3 ergibt 3,7168271% usw.

Die Richtigkeit des ermittelten Effektivzinssatzes lässt sich mit Hilfe eines Vergleichskontos überprüfen. Abgerechnet mit dem Effektivzinssatz führt es am Ende der Laufzeit zum Kontostand Null[1]:

Periode t	Restschuld K_{t-1}	$ü_t$	3,717% Zinsen	Tilgung T_t
1	9.800,00	300,00	364,25	-64,25
2	9.864,25	300,00	366,64	-66,64
3	9.930,89	10.300,00	369,11	9.930,89
4	0,00			

Der ermittelte Effektivzinssatz zeigt, wie sich das zum jeweiligen Zeitpunkt innerhalb des Investitionsobjektes gebundene Kapital verzinst. Es handelt sich um den internen Zinssatz.

Zu beachtende Prämissen des Äquivalenzprinzips:[2]

„Jeder verfügbare Kapitalbetrag wird - wenn erforderlich, beliebig lange – zum Kalkulationszinsfuß angelegt. Jeder zukünftig fällige Kapitalbetrag kann zu jedem früher gelegenen Zeitpunkt als Kredit in Höhe seines finanzmathematischen Barwerts aufgenommen werden. Dabei müssen Anlagezinssatz (Habenzinssatz) und Aufnahmezinssatz (Sollzinssatz) stets identisch sein. Werden nur aufgezinste Endwerte verwendet, ist diese Prämisse entbehrlich …

Die Höhe des verwendeten Auf-/Abzinsungs-Zinssatzes (Kalkulations-zinssatzes) hängt nicht von der Laufzeit oder Kapitalhöhe ab.

Auf-/Abzinsungsprozesse können beliebig weit in Zukunft oder Vergangenheit erfolgen.

Auf-/Abzinsungsprozesse erfolgen mit Hilfe der (reinen) exponentiellen Verzinsung …“

[1] Hier wird der mit Excel ermittelte Zinssatz verwendet. Bei Abrechnung mit genau 3,717013% ergibt sich eine vernachlässigbare Differenz von 0,06 €.

[2] Tietze, Jürgen: Einführung in die Finanzmathematik, Wiesbaden 2015, S. 70

Bei Beurteilung von real durchzuführenden Finanzierungen oder Investitionen ist zu prüfen, ob diese Prämissen den konkreten Bedingungen im zu untersuchenden Fall gerecht werden. So ist z.B. zu prüfen, ob wechselnde Soll- und Habenzinssätze zu berücksichtigen sind, ob die konkret vorliegende Zinsstruktur den aufgeführten Prämissen entspricht usw.

<u>Beispiel: Wiederanlage freigesetzter Beträge zu einem vom internen Zinssatz abweichenden Wiederanlagezinssatz</u>

Das zum jeweiligen Zeitpunkt im Investitionsobjekt gebundene Kapital wird zum internen Zinssatz verzinst. Die schrittweise freigesetzte Beträge können sich nicht mehr im Investitionsobjekt zum internen Zinssatz verzinsen.

	Vorgang	Betrag	gebundenes Kapital
t_0	Investition	9.800,00 €	9.800,00 €
t_1	Zinszuschlag	+364,25 €	
	Freisetzung	-300,00 €	9.864,25 €
t_2	Zinszuschlag	+366,64 €	
	Freisetzung	-300,00 €	9.930,89 €
t_3	Zinszuschlag	+369,11 €	
	Freisetzung	-10.300,00 €	0,00 €

Unter der Annahme, dass die freigesetzten Beträge bis zum Ende des Investitionszeitraums zu 1,00% p.a. wieder verzinslich angelegt werden, ergibt sich folgende Entwicklung:

	Vorgang	Betrag	Saldo
t_1	Anlage	+300,00 €	300,00
t_2	Zinszuschlag	+3,00 €	
	Anlage	+300,00 €	603,00 €
t_3	Zinszuschlag	+6,03	
	Abschlusszahlung	+10.300,00	10.909,03 €

Der ursprünglich investierte Geldbetrag von 9.800 € ist auf 10.909,03 € angewachsen:

$$9.800{,}00 \cdot (1 + i)^3 = 10.909{,}03$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{10.909{,}03}{9.800{,}00}} - 1 = 3{,}638\%\ p.a.$$

In Kurzfassung:

$$i = \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 1{,}01^2 + 300 \cdot 1{,}01 + 10.300}{9.800}} - 1 = 3{,}638\%\ p.a.$$

Das zum jeweiligen Zeitpunkt im Investitionsobjekt gebundene Kapital wurde effektiv mit 3,717% p.a. verzinst, das investierte Kapital hat sich jedoch über den gesamten Investitionszeitraum effektiv nur mit 3,638% p.a. verzinst.

Bei dieser Vorgehensweise wurde die Prämisse, dass sich alle Kapitalbeträge zum gleichen Kalkulationszinssatz verzinsen, aufgegeben. Die interne Zinsfußmethode wurde durch Einbeziehung eines vom internen Zinssatz abweichenden Wiederanlagezinssatzes modifiziert. Der modifizierte interne Zinssatz beträgt 3,638% p.a.

Um tatsächlich die Rendite zu erreichen, die mit Hilfe der Methode des internen Zinssatzes ermittelt wurde, müssten auch die freigesetzten und anderweitig wieder angelegten Beträge genau zum internen Zinssatz verzinst werden. Bei Anwendung des internen Zinssatzes mit der durch Excel ermittelten Genauigkeit als Wiederanlagezinssatz ergibt sich:

	Vorgang	Betrag	Saldo
t_1	Anlage	+300,00 €	300,00
t_2	Zinszuschlag	+11,15 €	
	Anlage	+300,00 €	611,15 €
t_3	Zinszuschlag	+22,72	
	Abschlusszahlung	+10.300,00	10.933,87 €

$$9.800 \cdot (1 + i)^3 = 10.933{,}87$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{10.933{,}87}{9.800{,}00}} - 1 = 3{,}71684\%\ p.a.$$