

## Finanzmathematik

### 1. Einfache Zinsrechnung (lineare Verzinsung)

1.1 Berechnung des Endwerts einer Einmalanlage bei linearer ganzjähriger Verzinsung nach n Verzinsungsjahren

$$K_n = K_0 \left( 1 + \frac{p}{100} n \right) = K_0 (1 + i \cdot n)$$

1.2 Berechnung des Gegenwartswerts einer künftigen Zahlung bei Abschlag auf den Endwert

$$K_0 = K_n (1 - i \cdot n)$$

1.3 Berechnung des Endwerts, der bei unterjähriger linearer Verzinsung nach m Zinstagen erreicht wird

$$K_m = K_0 \left( 1 + i \cdot \frac{m}{\text{Jahreslänge in Tagen}} \right)$$

Je nach Zinsrechnungsmethode werden die Jahresbruchteile der Verzinsungsdauer berechnet nach

30/360-Tage-Methode

act/360-Tage-Methode (Geldmarkt)

act/act-Methode (Kapitalmarkt)

1.4 Zinsstaffelrechnung

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Zinszahl}}{\text{Zinsdivisor}} = \frac{Zz}{ZD} = \frac{\#}{ZD}$$

$$\# = \frac{\text{Kapital} \cdot \text{Tage}}{100}$$

$$ZD = \frac{360}{p}$$

1.5 Berechnung des Endwerts von m konstanten regelmäßigen unterjährigen Zahlungen R (Rente) nach 1 Jahr bei linearer Verzinsung

1.5.1 bei vorschüssiger Zahlung

$$K_1 = R \left( m + \frac{m+1}{2} i \right)$$

1.5.2 bei nachschüssiger Zahlung

$$K_1 = R \left( m + \frac{m-1}{2} i \right)$$

### 2. Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung) im Zwei-Punkte-Fall

(einmalige Kapitalanlage – einmaliger Rückfluss)

2.1 Ermittlung des Endwerts  $K_n$  eines Anfangskapitals  $K_0$  nach n Verzinsungsperioden mit Hilfe des Aufzinsungsfaktors  $q^n$

$$K_n = K_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n = K_0 (1 + i)^n = K_0 q^n$$

2.2 Ermittlung des Anfangskapitals  $K_0$  bei gegebenem Endkapital  $K_n$  mit Hilfe des Abzinsungsfaktors

$$K_0 = K_n \frac{1}{q^n}$$

2.3 Ermittlung des Zinssatzes i, der im Verlaufe von n Verzinsungsperioden ein Anfangskapital  $K_0$  auf ein Endkapital  $K_n$  anwachsen lässt

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

2.4 Ermittlung der Anzahl von Verzinsungsperioden n, die erforderlich sind, um ein Anfangskapital  $K_0$  beim Zinssatz i auf ein Endkapital  $K_n$  anwachsen zu lassen

$$n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log q} = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log q}$$

#### 2.5 Unterjährige Zinseszinsrechnung

Wenn ein Anfangskapital  $K_0$  im Verlaufe des Jahres m-mal mit dem Periodenzinssatz  $j_m$  verzinst wird, dann gilt für den Zusammenhang zwischen dem Periodenzinssatz  $j_m$ , dem Jahreszinssatz i, dem Anfangskapital  $K_0$  und dem Endkapital nach 1 Jahr  $K_1$

$$K_0 (1 + j_m)^m = K_1 = K_0 (1 + i), \text{ woraus folgt}$$

$$(1 + j_m)^m = 1 + i$$

2.5.1 Berechnung des Endwerts  $K_{nm}$ , wenn ein Anfangskapital  $K_0$  über n Jahre verzinst wird und innerhalb jeden Jahres m-mal mit dem Periodenzinssatz  $j_m$ :

$$K_{nm} = K_0 (1 + j_m)^{n \cdot m}$$

In kaufmännischen Anwendungsfällen wird der unterjährige Periodenzinssatz j häufig zeitproportional aus dem nominellen Jahreszinssatz  $i_{nom}$  abgeleitet. Wenn das Zinsjahr aus m gleichlangen unterjährigen Zinsperioden besteht, ergibt sich der relative Periodenzinssatz  $j_{rel}$

$$j_{rel} = \frac{i_{nom}}{m}$$

2.5.2 Ableitung des effektiven Jahreszinssatzes  $i_{eff}$  aus dem nominellen Jahreszinssatz  $i_{nom}$  bei unterjähriger Verzinsung mit dem relativen Periodenzinssatz  $j_{rel}$

$$i_{eff} = \left( 1 + \frac{i_{nom}}{m} \right)^m - 1$$

2.5.3 Ermittlung des zum Jahreszinssatz i konformen Periodenzinssatzes  $j_m$

$$j_m = \sqrt[m]{1 + i} - 1$$

### 3. Rentenrechnung

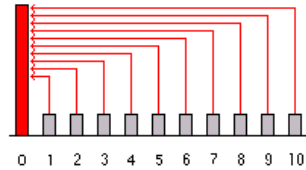
Konstante regelmäßige Zahlungen in gleichen Zeitabständen (Renten)

#### 3.1 Rentenbarwert:

Berechnung des heutigen Werts von n künftigen Rentenzahlungen R mit Hilfe des Rentenbarwertfaktors

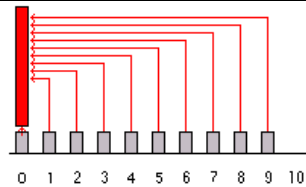
3.1.1 bei nachschüssiger (eine Periode nach heute beginnender) Zahlung

$$K_0 = R \frac{q^n - 1}{q^n (q - 1)}$$



3.1.2 bei vorschüssiger (heute beginnender) Zahlung

$$K_0 = R \frac{q^n - 1}{q^n (q - 1)} q$$

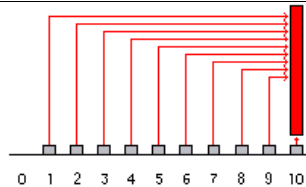


#### 3.2 Rentenendwert:

Berechnung des Endwerts von n Rentenzahlungen R mit Hilfe des Rentenendwertfaktors

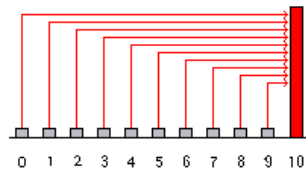
3.2.1 bei nachschüssiger Zahlung (Zahlungsbeginn eine Periode nach heute)

$$K_n = R \frac{q^n - 1}{q - 1}$$



3.2.2 bei vorschüssiger Zahlung (Zahlungsbeginn heute)

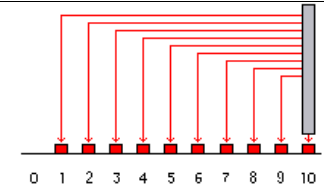
$$K_n = R \frac{q^n - 1}{q - 1} q$$



3.3 Umwandlung einer endfälligen Zahlung  $K_n$  in n Rentenzahlungen R mit Hilfe des Restwertverteilungsfaktors

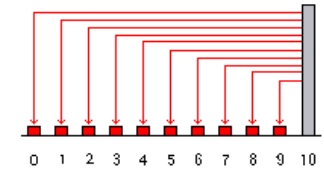
3.3.1 bei nachschüssiger Zahlung

$$R = K_n \frac{q - 1}{q^n - 1}$$



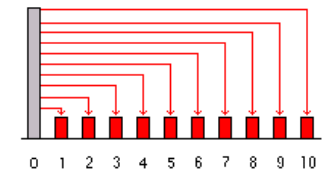
3.3.2 bei vorschüssiger Zahlung

$$R = K_n \frac{q - 1}{(q^n - 1)q}$$



3.4 Umrechnung einer heutigen Zahlung  $K_0$  in n konstante gleichwertige künftige Zahlungen (Annuitäten A) mit Hilfe des Annuitätenfaktors

$$A = K_0 \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$



#### 4. Tilgungsrechnung

4.1 Tilgungen am Ende jeder Periode in gleich hohen Tilgungsraten T:

Bei einer Laufzeit von n Jahren wird die Kreditsumme  $K_0$  jährlich getilgt mit

$$T = \frac{K_0}{n}$$

4.2 Annuitätentilgung (Tilgung zuzüglich ersparter Zinsen) im Standardfall

4.2.1 Ermittlung der Annuität A eines Darlehens  $K_0$  bei einer Laufzeit von n Jahren:

$$A = K_0 \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}$$

4.2.2 Restschuld  $K_m$  aus einem Annuitätendarlehen in Höhe von  $K_0$  mit einer Laufzeit von n Jahren unmittelbar nach Zahlung der m-ten Annuität A:

$$K_m = K_0 q^m - A \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

4.2.3 Tilgungsbetrag  $T_m$  in der m-ten Rate eines Annuitätendarlehens

$$T_m = A - K_{m-1} i$$

4.2.4 Laufzeit eines Annuitätendarlehens in Höhe von  $K_0$  mit der Annuität A und einem in der ersten Rate enthaltenen Tilgungsbetrag  $T_1$

$$n = \frac{\log \frac{A}{A - K_0 (q-1)}}{\log q}, \text{ woraus folgt}$$

$$n = \frac{\log \frac{A}{T_1}}{\log q}$$

4.2.5 Kaufmännische Rechenweise mit Nominalzinssatz und Tilgungssatz

Jahresleistung = Darlehen  $\times$  (Nominalzinssatz + Tilgungssatz),

wobei sich der Tilgungssatz aus dem in der ersten Rate enthaltenen Tilgungsbetrag ergibt:

$$\text{Tilgungssatz} = \frac{T_1}{K_0}$$

Bei unterjähriger Ratenzahlung mit m Zahlungen innerhalb des Jahres wird zeitproportional gerechnet:

$$\text{Rate} = \frac{\text{Jahresleistung}}{m}$$

#### Statische Verfahren der Investitionsrechnung

##### Kostenvergleichsrechnung

Kapitalkosten	Kalkulator. Abschreibung =	$\frac{\text{Anschaffungskosten} - \text{Restwert}}{\text{Nutzungsdauer}}$
	Kalkulator. Zinsen =	$\text{Kalkulationszinssatz} \times \frac{\text{Anschaffungskosten} + \text{Restwert}}{2}$
+ Fixe Betriebskosten		
= fixe Kosten insgesamt		
+ variable Betriebskosten		
= Gesamtkosten		

- Bei voraussichtlich gleicher mengenmäßiger Leistung der Vergleichsobjekte: Kostenvergleich pro Periode oder Kostenvergleich pro Leistungseinheit.
- Bei voraussichtlich unterschiedlicher mengenmäßiger Leistung: Kostenvergleich pro Leistungseinheit.

##### Ersatzproblem

Es sind zu vergleichen

- die durchschnittlichen jährlichen Kosten, die durch die fortgesetzte Nutzung des alten Investitionsobjektes entstehen, mit
- den durchschnittlichen jährlichen Kosten, die durch das neue Objekt verursacht werden.

##### Gewinnvergleichsrechnung

Erträge
- fixe Kosten
- variable Kosten
= Gewinn

- Bei gleicher mengenmäßiger Leistung: Gewinnvergleich pro Periode oder Gewinnvergleich pro Leistungseinheit
- Bei unterschiedlicher mengenmäßiger Leistung der Investitionsobjekte: Gewinnvergleich pro Periode

##### Rentabilitätsvergleichsrechnung

Rentabilität = durchschnittliche jährliche Verzinsung des eingesetzten Kapitals

$$= \frac{\text{durchschnittlicher Periodenerfolg}}{\text{durchschnittlicher Kapitaleinsatz}} \times 100$$

Durchschnittlicher Periodenerfolg:

- Schließt auch die erwirtschafteten kalkulatorischen Zinsen ein!
- tritt bei Rationalisierungsinvestitionen als Kostenersparnis in Erscheinung.

Üblicher Ansatz für den durchschnittlichen Kapitaleinsatz

bei nicht abnutzbaren Anlagegütern:	Anschaffungskosten
bei Umlaufvermögen:	Anschaffungskosten
bei abnutzbaren Anlagegütern:	halbe Anschaffungskosten (evtl. unter Berücksichtigung eines am Ende der Nutzungsdauer erwarteten Resterlöswertes)

### **Amortisationsvergleichsrechnung**

- als Durchschnittsrechnung:

$$\text{Amortisationszeit} = \frac{\text{Anschaffungskosten (evtl. zzgl. zusätzliches Umlaufvermögen)} - \text{Restwert}}{\text{durchschnittlicher jährlicher Rückfluß}}$$

Wenn nur mit Kosten und Erlösen gerechnet wird (typisch für die statische Investitionsrechnung) kann als durchschnittlicher jährlicher Rückfluss erfasst werden

Durchschnittlicher jährlicher Gewinn + jährliche (verdiente) Abschreibungen.

- als Kumulationsrechnung:

Die Nettorückflüsse werden so lange kumuliert, bis sie die Anschaffungskosten erreichen.

### **Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung**

#### **Kapitalwert**

= Barwert investitionsbedingter Einzahlungen – Barwert investitionsbedingter Auszahlungen

#### **Interner Zinsfuß**

Verzinsung des im Investitionsobjekt zum jeweiligen Zeitpunkt gebundenen Kapitals.

Mathematisch: Zinssatz, der zu einem Kapitalwert von NULL führt.

Den Lösungsansatz liefert die Äquivalenzgleichung der Finanzmathematik:

$$\text{Barwert der Gläubigerleistung} = \text{Barwert der Schuldnerleistung}$$

Eine rechnerische lineare Interpolation zur Ermittlung des internen Zinsfußes kann mit Hilfe der Formel

$$r = p_1 - C_{01} \frac{p_2 - p_1}{C_{02} - C_{01}} \text{ vorgenommen werden.}$$

Es bedeuten: r ... interner Zinsfuß,  $p_1$  und  $p_2$  die gewählten Versuchszinssätze sowie

$C_{01}$  und  $C_{02}$  die dazugehörigen Kapitalwerte.

#### **Modifizierter interner Zinsfuß**

Welche Verzinsung ergibt sich, wenn die zufließenden Einzahlungsüberschüsse bis zum Ende des Investitionszeitraums zu einem evtl. vom internen Zinsfuß abweichenden Zinssatz wieder angelegt werden?

#### **Annuitätenmethode**

Annuität = Kapitalwert x Annuitätenfaktor

### Auszüge aus dem Aktiengesetz

#### **§ 58 Verwendung des Jahresüberschusses**

(1) Die Satzung kann nur für den Fall, daß die Hauptversammlung den Jahresabschluß feststellt, bestimmen, daß Beträge aus dem Jahresüberschuß in andere Gewinnrücklagen einzustellen sind. Auf Grund einer solchen Satzungsbestimmung kann höchstens die Hälfte des Jahresüberschusses in andere Gewinnrücklagen eingestellt werden. Dabei sind Beträge, die in die gesetzliche Rücklage einzustellen sind, und ein Verlustvortrag vorab vom Jahresüberschuß abzuziehen.

(2) Stellen Vorstand und Aufsichtsrat den Jahresabschluß fest, so können sie einen Teil des Jahresüberschusses, höchstens jedoch die Hälfte, in andere Gewinnrücklagen einstellen. Die Satzung kann Vorstand und Aufsichtsrat zur Einstellung eines größeren oder kleineren Teils des Jahresüberschusses ermächtigen. Auf Grund einer solchen Satzungsbestimmung dürfen Vorstand und Aufsichtsrat keine Beträge in andere Gewinnrücklagen einstellen, wenn die andere Gewinnrücklagen die Hälfte des Grundkapitals übersteigen oder soweit sie nach der Einstellung die Hälfte übersteigen würden. Absatz 1 Satz 3 gilt sinngemäß...

#### **§ 158 Vorschriften zur Gewinn- und Verlustrechnung**

(1) Die Gewinn- und Verlustrechnung ist nach dem Posten "Jahresüberschuß/Jahresfehlbetrag" in Fortführung der Numerierung um die folgenden Posten zu ergänzen:

1. Gewinnvortrag/Verlustvortrag aus dem Vorjahr
2. Entnahmen aus der Kapitalrücklage
3. Entnahmen aus Gewinnrücklagen
  - a) aus der gesetzlichen Rücklage
  - b) aus der Rücklage für Anteile an einem herrschenden oder mehrheitlich beteiligten Unternehmen
  - c) aus satzungsmäßigen Rücklagen
  - d) aus anderen Gewinnrücklagen
4. Einstellungen in Gewinnrücklagen
  - a) in die gesetzliche Rücklage
  - b) in die Rücklage für Anteile an einem herrschenden oder mehrheitlich beteiligten Unternehmen
  - c) in satzungsmäßige Rücklagen
  - d) in andere Gewinnrücklagen

5. Bilanzgewinn/Bilanzverlust.

Die Angaben nach Satz 1 können auch im Anhang gemacht werden.